TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE: RICHIAMI, ESERCIZI ED APPROFONDIMENTI

Appunti presi dalle lezioni del Prof. Nedo Checcaglini
Liceo Scientifico di Castiglion Fiorentino (Classe 3B)

February 1, 2008

1 TRASFORMAZIONI

Consideriamo un piano π, sul quale sia stato fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy: *si definisce* ***trasformazione*** *del piano π in se stesso una corrispondenza biunivoca T che associa ad ogni punto $P(x,y)$ di π uno ed un solo punto $P'(x',y')$ di π stesso*, quindi ad ogni curva C di π una e una sola curva C' di π.

P' e C' si dicono rispettivamente *punto trasformato* e *curva trasformata* e le coordinate di P' sono esprimibili mediante funzioni matematiche di x e y, cioè si avrà: $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ che chiameremo *equazioni della trasformazione.*

La trasformazione inversa T^{-1} (che ovviamente esiste in quanto T è corrispondenza biunivoca) trasforma P' in P e C' in C.

In generale possiamo affermare che quando una figura viene sottoposta ad una "trasformazione" alcune proprietà della figura "si conservano", cioè "**rimangono invariate**"; sono proprio queste le proprietà che interessano e che si chiamano "**proprietà geometriche**".

Chiameremo allora **trasformazione identica o identità** la trasformazione che ad ogni punto del piano fa corrispondere il punto stesso; chiameremo **punto unito** un punto che in una trasformazione non identica viene trasformato in se stesso e **retta unita** una retta che viene trasformata in se stessa. Ci soffermiamo adesso sulle trasformazioni lineari ed in particolare sulle equazioni che ad esse si riferiscono; per quanto riguarda l'aspetto geometrico si rimanda ai testi di geometria.

1.1 TRASFORMAZIONI LINEARI

1.1.1 Affinità

Definition 1 *Si chiama* ***affinità*** *(o* ***trasformazione lineare****) nel piano π, ogni corrispondenza biunivoca che ad ogni punto $P(x,y)$ associa un punto*

$P'(x', y')$ le cui coordinate sono date da $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$ *dove a, b, c, d, p, q sono costanti e* $\Delta = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$*. La matrice* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *si chiama* ***matrice dell'affinità****.*

L'affinità si può esprimere anche in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

e in forma vettoriale compatta:

$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{p}$, con $\underline{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\underline{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$.

- L'affinità trasforma rette in rette, rette parallele in rette parallele, rette incidenti in rette incidenti.
- In un'affinità è costante il rapporto delle aree corrispondenti, cioè se S ed S' sono rispettivamente le aree di una figura e della sua trasformata nell'affinità, si ha $\frac{S'}{S} = |\Delta| = |\det A|$ (cioè il rapporto tra l'area della trasformata di una figura e l'area della figura stessa è uguale al valore assoluto del determinante della matrice dell'affinità); $|\Delta|$ è detto anche **rapporto di affinità** e precisamente un'affinità si dice *diretta*, o *positiva*, se $\Delta > 0$, *inversa*, o *negativa*, se $\Delta < 0$.
- Se $\Delta = 0$ non si ha affinità, ma si parla di trasformazione degenere.
- Una particolare affinità, detta **dilatazione**, è espressa dalle relazioni: $\begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$ $h, k \neq 0$, ove $\Delta = h \cdot k$. In questo caso l'origine degli assi è punto unito e anche gli assi cartesiani si trasformano in se stessi.

Diamo ora la seguente:

Definition 2 *Data un'affinità T di equazioni:* $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$, *si chiama* ***affinità inversa*** *l'affinità T^{-1} definita da:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\det A}(dx' - by' - dp + bq) \\ y = \dfrac{1}{\det A}(-cx' + ay' + cp - aq) \end{cases}$$

oppure in forma vettoriale: $\underline{x} = A^{-1}\underline{x'} - A^{-1}\underline{p}$.

Le equazioni dell'affinità inversa, sopra ottenute moltiplicando entrambi i membri della forma vettoriale compatta dell'affinità per A^{-1}, matrice inversa di A, si possono ottenere anche esplicitando x ed y in funzione di x'e y' (cioè considerando un sistema che ha x ed y come incognite, x'e y' come parametri, e risolvendolo ad es. mediante la regola di Cramer).

L'insieme delle affinità di un piano in sé può essere strutturato con un'operazione detta **prodotto di affinità**, che viene così definita:

Definition 3 *Date due affinità T_1 e T_2, di equazioni:*

$$T_1 : \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + p_1 \\ y' = c_1x + d_1y + q_1 \end{cases} \quad \text{e } T_2 : \begin{cases} x'' = a_2x + b_2y + p_2 \\ y'' = c_2x + d_2y + q_2, \end{cases}$$

si chiama **prodotto (o trasformazione composta) delle due affinità** T_1, T_2, la corrispondenza T tra i punti del piano che si ottiene eseguendo prima l'affinità T_1 e poi l'affinità T_2 e si scrive: $T = T_2 \circ T_1$.

Poiché valgono le seguenti proprietà:

- Il prodotto di due affinità è ancora un'affinità (avente come rapporto di affinità il prodotto dei rapporti di affinità);
- Il prodotto di due affinità gode della **proprietà associativa**;
- Esiste l'**elemento neutro** delle affinità, che è l'identità I di equazioni: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$
- Ogni affinità ammette l'**elemento inverso** rispetto al prodotto in quanto $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I$,

possiamo concludere che l'insieme delle affinità, strutturato con il prodotto, è **un gruppo** (non abeliano).

Si ha infine la seguente:

Definition 4 *Una trasformazione si dice **involutiva** se $T \circ T = I$, cioè se applicata due volte dà l'identità (e quindi se coincide con la sua inversa).*

1.1.2 Similitudini

Definition 5 *Si dice **similitudine** piana un'affinità che trasforma circonferenze in circonferenze.*

Le equazioni dell'affinità $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q, \end{cases}$ con $\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$ (e queste ultime sono le condizioni cui debbono soddisfare i coefficienti di un'affinità per essere una similitudine) divengono le *equazioni della similitudine* ed assumono la forma:

$$\begin{cases} x' = ax - cy + p \\ y' = cx + ay + q \end{cases} \text{ oppure: } \begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = cx - ay + q \end{cases}.$$

Il numero **reale positivo** $k = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2}$ si dice **rapporto di similitudine** ed esprime il rapporto costante fra due segmenti corrispondenti. La similitudine, come già l'affinità, si dirà *diretta* se $\Delta = a^2 + c^2 > 0$ e quindi $k = \sqrt{\Delta}$ (prima forma delle equazioni sopra riportate) ed *indiretta* se $\Delta = -a^2 - c^2 < 0$ e quindi $k = \sqrt{-\Delta}$ (seconda forma delle equazioni sopra riportate).

In una similitudine angoli corrispondenti sono isometrici (cioè uguali).

Remark 1 *Alcuni testi, per quanto riguarda la similitudine, danno la seguente*

Definition 6 *Si dice **similitudine** un'affinità nella quale è costante il rapporto tra le lunghezze di due segmenti corrispondenti qualsiasi.*

Anche in questo caso si dimostra che le equazioni della similitudine assumono le forme già viste:
$\begin{cases} x' = ax - cy + p \\ y' = cx + ay + q \end{cases}$ oppure: $\begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = cx - ay + q \end{cases}$ e quindi per dimostrare che un'affinità T è una similitudine di rapporto $k = \sqrt{\Delta}$ (oppure $k = \sqrt{-\Delta}$) basterà dimostrare che: $a = \pm d$ e $c = \mp b$.

1.1.3 Isometrie

Definition 7 *Si chiama **isometria** (o uguaglianza) piana ogni similitudine di rapporto $k = 1$.*

L'isometria si dice *diretta* se $\Delta = a^2 + c^2 = 1$, *indiretta* se $\Delta = -a^2 - c^2 = -1$.

Sono isometrie:

- **l'identità**, di equazioni: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$
- **la traslazione**, di vettore $\vec{v}(a, b)$, di equazioni: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$
- **la rotazione**, con centro nell'origine O, di un angolo α, di equazioni: $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$.

  Se $\alpha = \pi$, si ottiene **la simmetria rispetto ad** $O(0, 0)$di equazioni:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

- **la simmetria rispetto ad una retta** r *(isometria indiretta).*

In particolare riportiamo le equazioni delle simmetrie rispetto

all'asse x $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

all'asse y $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

alla retta $y = q$ $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2q \end{cases}$

alla retta $x = p$ $\begin{cases} x' = -x + 2p \\ y' = y \end{cases}$

alla bisettrice $y = x$ $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

alla bisettrice $y = -x$ $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$

- **simmetria rispetto ad un punto** $S(p; q)$.

Da quanto visto precedentemente, le equazioni di una simmetria rispetto ad un punto $S(p, q)$ sono:

$$\begin{cases} x' = -x + 2p \\ y' = -y + 2q \end{cases}$$

che per $p = 0$ e $q = 0$ si riconducono alla simmetria rispetto ad $O(0; 0)$.

Per quanto riguarda gli elementi invarianti delle isometrie, si veda la seguente tabella:

isometria	***Punti uniti***	***Rette unite***
identità	tutti i punti sono uniti	tutte le rette sono unite
simmetria assiale	punti appartenenti all'asse di simmetria	rette perpendicolari all'asse di simmetria
simmetria centrale	centro di simmetria	rette passanti per il centro di simmetria
traslazione	non ha punti uniti (eccetto l'identità)	rette parallele al vettore che la individua
rotazione con centro in O	il centro di rotazione	non ha rette unite

Proprietà delle isometrie:

- Il composto di due simmetrie centrali è sempre una traslazione.
- Il composto di due simmetrie assiali è:

- una simmetria centrale se gli assi sono perpendicolari;
- una traslazione se gli assi sono paralleli e distinti;
- una rotazione negli altri casi.

- Il composto di due traslazioni è una traslazione.
- Il composto di due rotazioni con lo stesso centro è una rotazione.

1.1.4 Omotetie

Definition 8 *Si dice **omotetia** una particolare similitudine di equazioni:*

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = ay \end{cases} \quad con\ \Delta = a^2 > 0.$$

L'omotetia è quindi una similitudine diretta, cioè conserva l'orientamento degli angoli, con ***a*** **rapporto di omotetia**; se $|a| > 1$, l'omotetia è un *ingrandimento*, se $|a| < 1$ è una *riduzione*. E' chiaro che, da quanto visto precedentemente, l'omotetia può essere vista anche come una dilatazione in cui $h = k$.

- *O (centro dell'omotetia)* è l'unico punto unito; ogni retta passante per il centro è invariante.
- Se il centro dell'omotetia è un punto $C \neq O$ si hanno le equazioni $\begin{cases} x' = ax + p \\ y' = ay + q \end{cases}$ e si parla ancora di omotetia, sempre di rapporto a, e di centro $C\left(\dfrac{p}{1-a}, \dfrac{q}{1-a}\right)$, coordinate che si ricavano facilmente essendo C l'unico punto unito dell'omotetia.
  Si tenga presente che talvolta l'omotetia di centro C viene chiamata con il nome di **dilatazione di centro** C. Se $a = 1$ si ha una traslazione, se $a = -1$ si ha una simmetria centrale; una **dilatazione di centro** C è la composizione di una omotetia con una traslazione.

Remark 2 *Alcuni testi, facendo precedere lo studio delle isometrie e delle omotetie a quello delle similitudini, danno la seguente*

Definition 9 *Si dice similitudine la composizione, in qualsiasi ordine, di una omotetia con una isometria.*

1.1.5 Ricerca degli elementi uniti di una trasformazione

A parte quanto osservato a proposito delle isometrie, vediamo come si procede nella ricerca dei punti e delle rette unite di una trasformazione T, dopo aver ricordato che:

- se dobbiamo trovare il trasformato di un punto useremo le equazioni dirette (sostituendo ad x e ad y le sue coordinate), mentre

- se dobbiamo trasformare una curva (o una retta) del tipo $y = f(x)$, dovremo ricavare le equazioni inverse e poi sostituirle nell'equazione della curva (o della retta) stessa.

Per determinare gli eventuali punti uniti basterà quindi porre $x' \equiv x$ e $y' \equiv y$, nel sistema $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$; si ha quindi $\begin{cases} x = ax + by + p \\ y = cx + dy + q \end{cases}$.

Se il sistema è determinato la trasformazione T ha un solo punto unito, se è indeterminato ha infiniti punti uniti, cioè una retta di punti uniti detta **retta puntualmente invariante**, se è impossibile non vi sono punti uniti.

Per determinare le eventuali rette unite (seguendo quanto sopra ricordato) dovremo inizialmente determinare la trasformazione inversa T^{-1} e successivamente la retta trasformata di una generica retta $r : y = mx + q$, sostituendo ad x e a y le espressioni presenti in T^{-1}. Dovendo allora la $r' : y' = m'x' + q'$ coincidere con r, basterà imporre che i coefficienti della r coincidano con i coefficienti della r'.

Poiché però le rette del tipo $y = mx + q$ non contengono le rette parallele all'asse y, tali rette non possono essere individuate con il precedente procedimento e quindi bisognerà controllare, a parte, il comportamento della trasformazione sulle rette del fascio improprio $x = h$. (*Trasformare una retta in forma implicita eviterebbe il "controllo" sopra indicato, ma questo procedimento, pur se negli esempi è a volte riportato, appare più complesso*).

Remark 3 *Chiaramente per la ricerca delle rette unite potremmo, come presente anche nella risoluzione di alcuni esempi, usare le trasformazioni dirette, applicarle alla generica retta $y' = m'x' + q'$ e seguire lo stesso procedimento sopra riportato; possiamo quindi usare indifferentemente uno dei due procedimenti, ma quest'ultimo, se non è espressamente richiesto il calcolo della T^{-1}, è ovviamente più semplice.*

1.2 ESERCIZI RISOLTI

1) *Data la trasformazione* $T : \begin{cases} x' = 3x - 2y + 1 \\ y' = 4x + y - 2 \end{cases}$ *, dire se rappresenta un'affinità, se ha punti uniti e come si trasforma il quadrato di vertici: $A(1;1)$, $B(1;2)$, $C(2;2)$, $D(2;1)$.*

Si calcola il determinante della matrice della trasformazione. Si ha: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11 \neq 0$. La trasformazione T è allora non degenere e perciò rappresenta un'affinità del piano in sé.

Andiamo adesso ad esaminare se la trasformazione ha punti uniti. Si

ha allora: $\begin{cases} x = 3x - 2y + 1 \\ y = 4x + y - 2 \end{cases}$ e quindi $\begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \\ 4x - 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$
che risultano quindi le coordinate del punto unito.

Infine, sostituendo le coordinate dei punti nelle equazioni della T, si trova facilmente che: $A'(2;3)$, $B'(0,4)$, $C'(3;8)$ e $D'(5;7)$.

2) *Data la trasformazione* $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, *dire se è un'affinità e, in caso affermativo, se è una similitudine.*

Poiché $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 16 = 17 \neq 0$, la trasformazione è un'affinità.

Poiché inoltre $\sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2} = k = \sqrt{17}$ e $ab + cd = 1 \cdot 4 + (-4) \cdot 1 = 0$ è anche una similitudine diretta di rapporto $\sqrt{17}$ (non è un'isometria).

3) *Data l'affinità* $T : \begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$ *, trovare i punti uniti, le rette unite e la trasformata di* $y = 2x$.

La T non è una similitudine, poiché anche se $\sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2} = k = \sqrt{5}$, $ab + cd = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \neq 0$. Per cercare i punti uniti, si ha: $\begin{cases} x = 2x + y + 1 \\ y = x + 2y + 1 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$, per cui, essendo il sistema indeterminato, si hanno infiniti punti uniti, cioè una retta di punti uniti *(retta puntualmente invariante),* quella di equazione $x + y + 1 = 0$.

Ricavate, eventualmente con la regola di Cramer, le equazioni della

$$T^{-1} : \begin{cases} x = \dfrac{2x' - y' - 1}{3} \\ y = \dfrac{-x' + 2y' - 1}{3} \end{cases},$$

la retta $y = mx + q$ (1) si trasforma in:
$\dfrac{-x' + 2y' - 1}{3} = m\left(\dfrac{2x' - y' - 1}{3}\right) + q$, da cui:
$y'(2 + m) = x'(2m + 1) + 3q + 1 - m$ e, in forma esplicita:
$y' = x'\left(\dfrac{2m + 1}{2 + m}\right) + \left(\dfrac{3q + 1 - m}{2 + m}\right)$.

Uguagliando i coefficienti di destra di quest'ultima a quelli di destra della (1), si ha $\begin{cases} \dfrac{2m + 1}{2 + m} = m \\ \dfrac{3q + 1 - m}{2 + m} = q \end{cases}$ da cui $m = \pm 1$. Per $m = -1$ si ha $q = -1$ e quindi $y = -x - 1$, cioè la retta già trovata.

Per $m = 1$ si ha $q = q$ (q indeterminato) e quindi le rette unite $y = x + q$ *(rette globalmente invarianti).*

Poiché $y = mx + q$ non contiene le rette del tipo $x = h$, bisogna verificare se tra di esse vi sono altre rette unite; facilmente si vede che non si hanno altre rette unite.

Se avessimo usato la forma implicita $ax + by + c = 0$ (2) avremmo dovuto imporre, una volta sostituite le equazioni della T^{-1} nella (2), la proporzionalità tra i coefficienti della retta data e della sua trasformata; infatti due rette $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c = 0$ coincidono se: $\begin{cases} ab' - a'b = 0 \\ ac' - a'c = 0 \end{cases}$

Precisamente si ha: $\begin{cases} x = \dfrac{2x' - y' - 1}{3} \\ y = \dfrac{-x' + 2y' - 1}{3} \end{cases}$ e svolti i calcoli e portata la retta in forma implicita $(2a - b)x' + (2b - a)y' - a - b + 3c = 0$ (3), da cui: $\dfrac{a}{2a - b} = \dfrac{b}{2b - a} = \dfrac{c}{3c - a - b}$ per la proporzionalità tra i coefficienti corrispondenti.

Si ha quindi: $\dfrac{a}{2a - b} = \dfrac{b}{2b - a} \Rightarrow 2ab - b^2 = 2ab - a^2$ $(a,b \neq 0)$ per cui $a = \pm b$.

Per $a = b$:
$\dfrac{a}{2a - a} = \dfrac{b}{2b - b} = \dfrac{c}{3c - 2a} \Rightarrow 1 = \dfrac{c}{3c - 2a} \Rightarrow 3c - 2a = c \Rightarrow$ $a = c = b$ per cui la trasformata ha equazione $ax' + ay' + a = 0$ e, dividendo per $a \neq 0$ e scrivendo senza gli apici *poiché è fisso il sistema di riferimento*, la retta unita $x + y + 1 = 0$.

Per $a = -b$:
$\dfrac{a}{2a + a} = \dfrac{b}{2b + b} = \dfrac{c}{3c + b - b} \Rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{c}{3c} \Rightarrow c = c$ (c indeterminato) e quindi la trasformata della (2), scritta senza apici, è: $ax - ay + c = 0$ e, dividendo per $a \neq 0$, il fascio di rette unite $x - y + \dfrac{c}{a} = 0$.

Si controlli la concordanza dei risultati e si verifichi, ad esempio, che è unita la retta $y = x + 3$.

Infine la retta $y = 2x$ si trasforma in: $\dfrac{-x' + 2y' - 1}{3} = 2\left(\dfrac{2x' - y' - 1}{3}\right)$ e quindi: $4y' = 5x' - 1$

4) *Data la trasformazione T:* $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y - 4 \end{cases}$, *si individui la natura di T e i suoi punti e rette unite (dalla Maturità Scientifica sper. PNI sess. suppl.'92).*

Poiché $ad - bc = 1 \neq 0$ la T è un'affinità,è una similitudine di rapporto $k = 1$ $(ab + cd = 0)$, cioè un'isometria e precisamente (per le equazioni già viste) *una simmetria centrale di centro* $C(0; -2)$. Come sappiamo (vedi tabella) l'unico punto unito è il centro di simmetria e sono unite tutte le rette che per esso passano, cioè il fascio di rette di centro C.

Se non avessimo riconosciuto la natura della trasformazione, per ricercare gli elementi invarianti avremmo posto:
$\begin{cases} x = -x \\ y = -y-4 \end{cases}$ e quindi il punto unito $C(0;-2)$.

Per cercare invece le rette unite, trovata la T^{-1} : $\begin{cases} x = -x' \\ y = -y'-4 \end{cases}$,

la retta in forma esplicita $y = mx+q$ si trasforma in $y' = mx'-4-q$, da cui $m = m$ e $-4-q = q$, cioè $q = -2$; le rette unite sono allora: $y = mx-2$, fascio di rette con centro $C(0;-2)$.

Usando la forma implicita $ax+by+c = 0$, si ha: $ax'+by'+4b-c = 0$ e dovendo essere proporzionali i coefficienti, essendo in questo caso uguale ad 1 la costante di proporzionalità poiché i coefficienti di x e x' e di y e y' sono uguali, si ha $4b-c = c$, cioè $c = 2b$ (con a e b arbitrari) e infine $ax+by+2b = 0$ o meglio ancora $ax+b(y+2) = 0$. I risultati trovati coincidono con quanto già osservato.

5) *Data la trasformazione* $T : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, *se ne studi la natura e se ne determinino i suoi elementi invarianti.*

La T può esser messa sotto forma: $\begin{cases} x' = 2x-2 \\ y' = \frac{1}{2}\,y+1 \end{cases}$.

E' ovviamente un'affinità poiché $ad-bc = 1 \neq 0$; non è una similitudine $\begin{cases} a^2+c^2 \neq b^2+d^2 \\ ab+cd = 0 \end{cases}$.

Per ricercare i punti uniti poniamo:
$\begin{cases} x = 2x-2 \\ y = \frac{1}{2}\,y+1 \end{cases}$ e quindi $C(2;2)$ è punto unito.

Per cercare invece le rette unite, questa volta non troviamo la T^{-1} ma usiamo subito le equazioni della T, trasformando $y' = mx'+q$. Si ha:
$\frac{1}{2}\,y+1 = m(2x-2)+q$, da cui $y = 4mx-4m+2q-2$ ed infine il sistema: $\begin{cases} m = 4m \\ q = -4m+2q-2 \end{cases}$ e con facili calcoli $\begin{cases} m = 0 \\ q = 2 \end{cases}$, cioè la retta $y = 2$ è retta (globalmente) invariante.

Controlliamo ora se vi sono rette unite parallele all'asse y, cioè rette del tipo $x = h$. Si ha: $2x-2 = h$, cioè $x = \dfrac{h+2}{2}$ e quindi $h = \dfrac{h+2}{2}$ ed infine $h = 2$. Pertanto anche la retta verticale $x = 2$ è retta unita.

6) *Data la trasformazione lineare* $T : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, *dire se è una similitudine, se è un'isometria, se è una rotazione.*

La T può esser messa sotto forma: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$. E' ovviamente un'affinità poiché $ad-bc \neq 0$; *è una similitudine di rapporto* $k = 1$ $(ab+cd = 0)$, *cioè* *un'isometria, e una rotazione poiché* $a = 0 = cos\alpha$, $b = -1 = sen\alpha$ si ha $\alpha = -90$, cioè si tratta di una rotazione di -90 intorno all'origine.

7) *Dire come si trasforma l'equazione della circonferenza* $x^2 + y^2 = 1$ *nell'omotetia di equazioni:* $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$.

Ricavate le inverse si ha: $x'^2/9 + y'^2/9 = 1$. L'omotetia, particolare similitudine, trasforma infatti circonferenze in circonferenze.

8) *Data la funzione di equazione:* $y = -3x^2 + 4x - 5$, *sia* C *la sua rappresentazione grafica; scrivere l'equazione della funzione il cui grafico* C' *sia il traslato di* C *rispetto alla coppia ordinata* $(-3; 4)$.

Si avranno pertanto le equazioni: $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 4 \end{cases}$ e le inverse: $\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 4 \end{cases}$ che sostituite nell'equazione della parabola danno: $y\prime - 4 = -3(x' + 3)^2 + 4(x' + 3) - 5$, da cui con semplici calcoli, $y' = -3x'^2 - 14x' - 16$ che, essendo fisso il sistema di riferimento, può essere scritta: $y = -3x^2 - 14x - 16$ usando le stesse coordinate.

9) *Dato il quadrato di vertici* $A(2; 1)$, $B(2; 3)$, $C(4; 3)$ *e* $D(4; 1)$ *determinare come si trasforma nella traslazione:* $\begin{cases} x' = x - 7 \\ y' = y + 4 \end{cases}$ *e nella rotazione di* $\alpha = -90$, *cioè nella rotazione di equazioni* $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$.

Facilmente, per la traslazione si ha: $A'(-5, 5)$, $B'(-5, 7)$, $C'(-3, 7)$ e $D'(-3, 5)$ e per la rotazione: $A'(1, -2)$, $B'(3, -2)$, $C'(3, -4)$ e $D'(1, -4)$.

NOTATION

Abbiamo precedentemente considerato le traslazioni e le rotazioni come trasformazioni dei punti del piano.

Riferendo tale piano ad un sistema fisso di assi cartesiani ortogonali si può pensare che siano i punti "*a muoversi*" con un movimento rigido individuato, nel primo caso dalla *traslazione di vettore* $\vec{v}(a, b)$ mentre il **sistema di riferimento resta fisso**, nel secondo caso dalla *rotazione di angolo* α mentre il **sistema di riferimento resta fisso** *(si possono infatti, una volta effettuata la trasformazione, usare le stesse coordinate per l'equazione della curva ottenuta)***.**

Possiamo comunque affrontare il problema della trasformazione delle coordinate cartesiane da un altro punto di vista: **i punti (e la curva)** resteranno **fissi,** mentre si muoverà il sistema di riferimento con un movimento rigido detto *traslazione*, nel primo caso, e *rotazione* nel secondo. Possiamo cioè prendere in esame gli stessi punti (e la stessa curva) riferiti a **due diversi sistemi di riferimento xOy e XO'Y** per le *traslazioni* **e xOy e XOY** per le *rotazioni*, per cui si invita a prestare particolare attenzione alla formulazione di quanto richiesto per non far confusione tra equazioni dirette e inverse.

1.3 APPROFONDIMENTI SULLE AFFINITÁ

1.3.1 Affinità centrale

Per alcuni esercizi può essere utile ricordare la seguente:

Definition 10 *Si dice **affinità centrale** un'affinità che ha un solo punto unito: il centro della trasformazione.*

Un'affinità centrale si dirà *iperbolica*, *parabolica* od *ellittica* se ammette rispettivamente *due* (e solo due), *una* (e solo una) o *nessuna* retta unita (globalmente).

Se prendiamo il punto unito come origine del sistema di riferimento, le equazioni dell'affinità centrale assumono la forma:
$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ con $ad - bc \neq 0$.

Esempio:
Tra le centro-affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases},$$

trovare quella che trasforma $B(6;0)$ in $C(3;4)$ e $C(3;4)$ in $D(0;4)$; successivamente stabilire se la centro-affinità trovata presenta rette unite. (dal problema 2 dell'esame di stato PNI, sess. suppl. 2003).

Dovendo trovare la centro-affinità che porta $B(6;0) \to C(3;4)$ e $C(3;4) \to D(0;4)$, si avrà il sistema:
$\begin{cases} 3 = a \cdot 6 + b \cdot 0 \\ 4 = c \cdot 6 + d \cdot 0 \\ 0 = a \cdot 3 + b \cdot 4 \\ 4 = c \cdot 3 + d \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{8} \\ c = \frac{2}{3} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$ e quindi la trasformazione

$T : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{8}y \\ y' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$ che è una affinità diretta con $\Delta = \dfrac{1}{2}$.

L'affinità, che non è una similitudine, ha ovviamente $O(0;0)$ come punto unito; vediamo se presenta rette unite.

Troviamo le equazioni delle inverse (che sarebbero comunque superflue per la ricerca delle rette unite); risolvendo con la regola di Cramer rispetto ad x ed y, otteniamo:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} x' & -\frac{3}{8} \\ y' & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\frac{1}{2}} = x' + \frac{3}{4}y' \text{ e } y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & x' \\ \frac{2}{3} & y' \end{vmatrix}}{\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}x' + y',$$

cioè $T^{-1} : \begin{cases} x = x' + \frac{3}{4}y' \\ y = -\frac{4}{3}x' + y' \end{cases}$.

Data la retta $y = mx + q$, si ottiene:

$$-\frac{4}{3}x + y = m\left(x + \frac{3}{4}y\right) + q \Rightarrow$$
$$y - \frac{3}{4}my = \frac{4}{3}x + mx + q \Rightarrow$$
$$y = \frac{x\left(\frac{4}{3} + m\right)}{\left(1 - \frac{3}{4}m\right)} + \frac{q}{\left(1 - \frac{3}{4}m\right)}.$$

Si ha allora il sistema: $\begin{cases} m = \dfrac{\left(\frac{4}{3} + m\right)}{\left(1 - \frac{3}{4}m\right)} \\ q = \dfrac{q}{\left(1 - \frac{3}{4}m\right)} \end{cases}$. La prima equazione porta a:

$m - \frac{3}{4}m^2 = \frac{4}{3} + m \Rightarrow \frac{3}{4}m^2 = -\frac{4}{3}$ che non ha soluzioni reali e quindi non vi sono rette unite del tipo $y = mx + q$; poiché inoltre $x = h \;\rightarrow\; x + \frac{3}{4}y = h$, non vi sono rette unite neppure del tipo $x = h$.
L'affinità centrale in esame, non presentando alcuna retta unita (globalmente), è allora di tipo *ellittico*.

1.3.2 Composizione di trasformazioni

Abbiamo già parlato del prodotto (o composizione) di due trasformazioni T_1 e T_2. Supponiamo che al punto P, tramite la T_1, corrisponda il punto P' e a quest'ultimo, tramite la T_2, corrisponda il punto P''. Sappiamo che prima dobbiamo applicare la T_1 e poi la T_2 e, detta T la trasformazione ottenuta che porta P in P'', si scrive $T = T_2 \circ T_1$ (e si legge T uguale a T_2 composto T_1); si scrive prima T_2 in quanto T_2 opera sul risultato ottenuto tramite T_1.

Si veda a proposito il seguente esempio.

Esempio:
Siano date le trasformazioni lineari:

$$T_1 : \begin{cases} x' = x + y - 5 \\ y' = 2x - 3y - 1 \end{cases} \text{ e } T_2 : \begin{cases} x'' = 2x' + y' + 3 \\ y'' = -x' - y' + 3 \end{cases}$$

si trovi la trasformazione T ottenuta applicando in successione la T_1 e la T_2, cioè si trovi $T = T_2 \circ T_1$.

Si avrà: $P(x, y) \xrightarrow{T_1} P'(x', y') \xrightarrow{T_2} P''(x'', y'')$ e quindi:

$P(x, y) \xrightarrow{T_1} P'(x' = x + y - 5, y' = 2x - 3y - 1) \xrightarrow{T_2} P''(x'' = 2x' + y' + 3, y'' = -x' - y' + 3)$ ed infine:

$$T : \begin{cases} x'' = 2\,(x + y - 5) + (2x - 3y - 1) + 3 = 4x - y - 8 \\ y'' = -\,(x + y - 5) - (2x - 3y - 1) + 3 = -3x + 2y + 9 \end{cases} \text{ cioè}$$

$$T : \begin{cases} x'' = 4x - y - 8 \\ y'' = -3x + 2y + 9 \end{cases} .$$

N.B. *Possiamo determinare la composizione delle due trasformazioni anche in forma matriciale.*

Siano infatti:

$$T_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$T_2 : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix};$$

si avrà: $T = T_2 \circ T_1$:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ed eseguendo il prodotto tra matrici:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

e sommando le ultime due matrici:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix},$$

cioè:

$T = T_2 \circ T_1 : \begin{cases} x'' = 4x - y - 8 \\ y'' = -3x + 2y + 9 \end{cases}$

che coincide ovviamente con quella già trovata.

L'alunno, in base alle sue conoscenze, potrà quindi scegliere il metodo che ritiene più opportuno per la composizione (prodotto) di due trasformazioni lineari.

1.3.3 Simmetria assiale rispetto ad una retta qualunque

Abbiamo già esaminato le equazioni della simmetria assiale avente per asse una retta verticale (asse y o sua parallela) o una retta orizzontale (asse x o sua parallela. Particolare attenzione va posta quando vanno ricercate le equazioni della simmetria assiale rispetto ad una retta qualunque.

Ricordiamo che data una retta r di equazione $y = mx + q$ e due punti $P(x, y)$ e $P'(x', y')$ simmetrici rispetto ad r, si ha:

- il punto medio del segmento PP' è: $M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$;
- il coefficiente angolare del segmento PP' è: $-\frac{1}{m} = \frac{y'-y}{x'-x}$, dove m è il coefficiente angolare della retta r.

Poiché $M \in r$ e $PP' \perp r$, si ottiene il sistema: $\begin{cases} \frac{y+y'}{2} = m\left(\frac{x+x'}{2}\right) + q \\ -\frac{1}{m} = \frac{y'-y}{x'-x} \end{cases}$,

che risolto rispetto a x' e y' ci dà le equazioni della simmetria di asse r.

Esempio:

Scrivere le equazioni della simmetria assiale che ha come asse la retta di equazione $y = 2x - 3$.

Dal sistema sopra riportato otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{y+y'}{2} = 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) - 3 \\ -\frac{1}{2} = \frac{y'-y}{x'-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y + y' = 2x + 2x' - 6 \\ 2y' - 2y = -x' + x \end{cases} \Longrightarrow$$

$\begin{cases} 2x' - y' = -2x + y + 6 \\ x' + 2y' = x + 2y \end{cases}$ che risolto rispetto a x' e y' ci permette di trovare le equazioni della simmetria di asse r:

$$T : \begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{12}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{6}{5} \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che, detta A la matrice della trasformazione, $\det A = -1$ (la simmetria assiale è infatti isometria indiretta) e che la T è **involutiva**, cioè coincide con la sua inversa.

1.4 ESERCIZI PROPOSTI

1. Dire se le seguenti equazioni definiscono un'affinità:

$$a)\begin{cases} x' = -2x + y - 1 \\ y' = \frac{1}{2}x - 3y + 2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x' = 3x - y + 1 \\ y' = 6x - 2y - 4 \end{cases}.$$

2. Data la trasformazione: $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + y \end{cases}$, verificare che è un'affinità e determinare le equazioni della trasformazione indiretta.

   Determinare le coordinate dei punti corrispondenti dei seguenti:

$$O(0,0), \qquad A(2,3), \qquad B\left(1, \frac{3}{2}\right), \qquad C(-1,-2).$$

   Verificare che, ai tre punti allineati O, A, B, corrispondono punti allineati.

3. Data la trasformazione: $\begin{cases} x' = 2x + 3y - 4 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$, determinare l'equazione della trasformata della retta di equazione: $x - 4y + 5 = 0$. Successivamente determinare se la trasformazione ha punti uniti.

4. Data la trasformazione di equazioni: $\begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - 2y \end{cases}$, studiarne la natura e determinarne gli eventuali elementi invarianti (punti uniti e rette unite).

5. Determinare a, b, c e d nelle equazioni dell'affinità: $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$, sapendo che i corrispondenti dei punti $A(1,2)$, $B(-2,3)$ sono i punti $A'(8,-1)$, $B'(5,-5)$.

   La affinità ottenuta è involutiva?

6. Data la trasformazione lineare: $T: \begin{cases} x' = 2x - 3y + 1 \\ y' = 4x - 6y - 2 \end{cases}$, dire se rappresenta un'affinità, trovare come si trasforma il quadrato di vertici $A(1,1)$, $B(1,2)$, $C(2,2)$, $D(2,1)$ e l'area della figura trasformata.

7. Data la trasformazione lineare: $T : \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$, dire se essa è una similitudine; nell'eventualità che T sia una similitudine, dire se è anche isometria e determinarne la natura ed i suoi elementi invarianti.

8. Determinare le equazioni della simmetria assiale il cui asse è la retta di equazione: $2x - y - 1 = 0$.

9. Data l'omotetia: $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y - 3 \end{cases}$, trovare il centro di omotetia e stabilire come si trasforma il triangolo di vertici: $A(2, 0)$, $B\,(4, 4)$, $C\,(5, 2)$.

10. Date le due trasformazioni lineari: $T_1 : \begin{cases} x' = x + y - 5 \\ y' = 2x + 3y - 1 \end{cases}$ e $T_2 : \begin{cases} x' = 2x + y + 3 \\ y' = -x + y + 3 \end{cases}$, determinare la natura e gli elementi uniti di ciascuna di esse. Successivamente determinare le trasformazioni composte $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$.

11. Data la parabola di equazione $y = x^2 + 4$, scrivere l'equazione della sua simmetrica rispetto alla retta $y = -x + 3$.

12. Determinare l'omotetia di centro $(4, 2)$ e rapporto di omotetia -2.

Indice